page 98 1/28 1992
Agrégation Externe. Options

concours externe
de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition de mathématiques appliquées

Durée : 6 heures

Tout document est interdit.

Calculatrice électronique — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Les candidats doivent obligatoirement traiter l'option qu'ils ont choisie au moment de leur inscription.

Ils composeront sur du papier de composition quadrillé 5 × 5.

ANALYSE NUMÉRIQUE ..... p. 3 à 10

MÉCANIQUE GÉNÉRALE ..... p. 11 à 15

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES ..... p. 17 à 24

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE ..... p. 25 à 30

Tournez la page S.V.P.

ANALYSE NUMÉRIQUE

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements ainsi que la justification des calculs constitueront des éléments importants dans l'appréciation des copies.

NOTATIONS GENERALES

$\mathbf{N}$: ensemble des entiers naturels ;

$\mathbf{N}^*$: ensemble des entiers naturels privé de 0.

$\mathbf{R}^n$ est muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique noté $< .,. >$; la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$ est notée $\|.\|$.

$\overline{B}(x,r) = \{x' \in \mathbf{R}^n | \quad \|x' - x\| \leq r\}$.

$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$: ensemble des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients réels ; $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est une abréviation de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$.

On identifie les applications linéaires de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$ et les matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ qui les représentent dans les bases canoniques ; de même on identifie naturellement les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

I_n est la matrice identité de taille n.

$\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$: ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

A^T est la notation utilisée pour la transposée de la matrice A.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite symétrique semidéfinie positive si, et seulement si,

$$A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \text{ et } < Ax, x > \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^n.$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite symétrique définie positive si, et seulement si,

$$A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \text{ et } < Ax, x > > 0 \text{ pour tout } x \text{ non nul dans } \mathbf{R}^n.$$

Pour une fonction numérique f définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^n$, différentiable en $x \in \mathcal{O}$, $\nabla f(x)$ désigne le (vecteur) gradient de f en x.

PRESENTATION DU PROBLEME

La première partie du problème concerne l'obtention des conditions d'optimalité du 1 ° ordre pour un problème d'optimisation avec contraintes, par une méthode itérative de pénalisation. Les résultats de cette partie sont utilisés dans les autres parties du problème.

La deuxième partie concerne la minimisation d'une fonction objectif du type $\max\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ avec une application à un problème d'approximation au sens de Chebyshev.

Dans la troisième partie on étudie les préliminaires nécessaires à la détermination d'une direction d'avancée dans un algorithme d'optimisation du second ordre utilisant l'approximation quadratique de la fonction à minimiser.

PREMIERE PARTIE

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : \mathcal{O} \to \mathbf{R}$ une fonction continûment différentiable sur $\mathcal{O}$, $g_1, g_2, \ldots, g_p$ $(p \in \mathbf{N}^*)$, $h_1, h_2, \ldots, h_q$ $(q \in \mathbf{N}^*)$ des fonctions continûment différentiables de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$.

L'ensemble S des contraintes est défini comme suit :

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n | \; g_i(x) \leq 0 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, p \text{ et } h_j(x) = 0 \text{ pour tout } j = 1, \ldots, q\}$$

(contraintes sous forme d'*inégalités* et sous forme d'*égalités* ; toutefois les situations étudiées dans le problème ne feront pas apparaître nécessairement les deux formes de contraintes). On suppose que S est non vide et contenu dans $\mathcal{O}$.

$x^* \in S$ est dit *minimum local* de f sur S s'il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(x^*, r) \subset \mathcal{O}$ et $f(x) \geq f(x^*)$ pour tout $x \in S \cap \overline{B}(x^*, r)$.

Tournez la page S.V.P.

On dit que $x^* \in S$ est un *minimum global* de f sur S (ou que x^* *minimise* f *sur* S) si $f(x) \geq f(x^*)$ pour tout $x \in S$.

1° Soit $x^* \in S$ un minimum local de f sur S, minimisant f sur $S \cap \overline{B}(x^*, r)$.
Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ on définit

$$\begin{aligned} \Phi_k &: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \to \mathbf{R} \\ U = (u, v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q) &\mapsto \Phi_k(U) = u + k\sum_{i=1}^{p}(u_i^+)^2 + k\sum_{j=1}^{q} w_j^2 \end{aligned}$$

(u_i^+ désigne ici $\max\{0, u_i\}$)
et $F_k : \mathcal{O} \to \mathbf{R}$ par :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{O} \mapsto F_k(x) &= \Phi_k(f(x), g_1(x), \ldots, g_p(x), h_1(x), \ldots, h_q(x)) + \|x - x^*\|^2 \\ &= f(x) + k\sum_{i=1}^{p}\left[g_i^+(x)\right]^2 + k\sum_{j=1}^{q}\left[h_j(x)\right]^2 + \|x - x^*\|^2 \end{aligned}$$

On désigne par x_k un point de $\overline{B}(x^*, r)$ minimisant F_k sur $\overline{B}(x^*, r)$.

1.1 Prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $F_k(x_k) \leq f(x^*)$.
En déduire :
(i) : $\lim_{k \to +\infty} g_i^+(x_k) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, p$
et
(ii) ! $\lim_{k \to +\infty} h_j(x_k) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, q$.

1.2 Prouver que si $\tilde{x}$ est la limite d'une suite extraite de la suite $(x_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$, alors $\tilde{x} = x^*$.
En déduire que la suite $(x_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge vers x^* quand $k \to +\infty$.

1.3

1.3.1 Calculer $\nabla\Phi_k(U)$, sa norme euclidienne $\|\nabla\Phi_k(U)\|$.
En posant $U_k = (f(x_k), g_1(x_k), \ldots, g_p(x_k), h_1(x_k), \ldots, h_q(x_k))$ montrer que l'on peut extraire de la suite

$$\left(\frac{\nabla\Phi_k(U_k)}{\|\nabla\Phi_k(U_k)\|}\right)_{k \in \mathbf{N}^*}$$

une suite qui converge vers un vecteur

$$(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q)$$

vérifiant

(α) $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$ ne sont pas tous nuls ;
(β) $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, p$;

1.3.2 Que vaut $\nabla F_k(x_k)$? Montrer encore que :
(γ) $\lambda_i g_i(x^*) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, p$;
(δ) $\lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0$.

On dira que $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$ sont des *multiplicateurs positivement homogènes* en x lorsque les conditions (α), (β), (γ) et (δ) précédentes sont satisfaites en x.

2° Dans cette question on fait l'hypothèse suivante (sur x élément générique de S) :

$(\mathbf{QC})_x$ Les vecteurs $\nabla h_1(x), \ldots, \nabla h_q(x)$ sont linéairement indépendants et il existe $d \in \mathbf{R}^n$ vérifiant :

$$< \nabla g_i(x), d > < 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } g_i(x) = 0$$

et

$$< \nabla h_j(x), d >= 0 \text{ pour tout } j = 1, \ldots, q.$$

2.1 Montrer que si $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$ sont des multiplicateurs positivement homogènes en x, alors $\lambda_0 > 0$ nécessairement.

2.2 On dit que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$ sont des *multiplicateurs d'ordre un* en x lorsque $1, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$ sont des multiplicateurs positivement homogènes en x.
Montrer que l'ensemble des multiplicateurs d'ordre un en x est un convexe compact non vide de $\mathbf{R}^{p+q}$.

3° On fait pour cette question les hypothèses suivantes sur les données :

$\mathcal{O}$ est convexe, $f : \mathcal{O} \to \mathbf{R}$ est convexe et différentiable sur $\mathcal{O}$;
$g_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est convexe et différentiable pour tout $i = 1, \ldots, p$;
$h_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est affine pour tout $j = 1, \ldots, q$, c'est-à-dire de la forme
$x \mapsto h_j(x) = < a_j, x > - b_j$ avec $a_j \in \mathbf{R}^n$ et $b_j \in \mathbf{R}$.

3.1 On considère la condition suivante :

(**QCC**) Les vecteurs $a_1, \ldots, a_q$ sont linéairement indépendants et il existe $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ vérifiant :

$$g_i(\bar{x}) < 0 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, p$$

et

$$< a_j, \bar{x} > - b_j = 0 \text{ pour tout } j = 1, \ldots, q.$$

Montrer que (**QCC**) implique $(\mathbf{QC})_x$ pour tout point x de S.

3.2 On suppose que (**QCC**) est vérifiée. Montrer l'équivalence des énoncés suivants concernant $x \in S$:
(e_1) x est un minimum global de f sur S ;
(e_2) x est un minimum local de f sur S ;
(e_3) il existe des multiplicateurs d'ordre un en x ;
(on pourra considérer la fonction $\mathcal{L} : u \in \mathcal{O} \mapsto f(u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(u) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(u)$).

4° On traite ici un exemple de problème de minimisation (avec contraintes) dans $\mathbf{R}^n$. Les données du problème sont :
$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, \sigma$ des réels (fixés) tous strictement positifs ;

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(e^{-b_i x_i} - 1\right) ;$$

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \quad | \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = \sigma \text{ et } x_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n\}.$$

4.1 Montrer qu'il existe un et un seul $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in S$ minimisant (globalement) f sur S.

Tournez la page S.V.P.

4.2 Indiquer pourquoi l'équation

$$\Phi(r) = \sum_{\{i|r<a_ib_i\}} \frac{1}{b_i} \ln \frac{a_ib_i}{r} = \sigma, \quad r > 0$$

a une seule solution, que l'on notera r^*

(ln désigne ici le logarithme népérien et $\sum_{\emptyset} = 0$ par convention).

4.3 Exprimer les coordonnées x_i^* du minimum global x^* de f sur S en fonction de r^* et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.

DEUXIEME PARTIE

5° Soit $m \in \mathbf{N}^*$, soit $f_1, \ldots, f_m$ m fonctions continûment différentiables de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ et $f : x \in \mathbf{R}^n \mapsto f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\}$. Pour $x \in \mathbf{R}^n$, on pose

$$I(x) = \{i|\ f_i(x) = f(x)\}.$$

5.1 Soit x^* un minimum local de f sur $\mathbf{R}^n$. En ajoutant une variable α et appliquant les résultats de la première partie à la fonction φ_0 et aux contraintes définies par les fonctions φ_i suivantes

$\varphi_0 : (x, \alpha) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mapsto \varphi_0(x, \alpha) = \alpha,$
$\varphi_i : (x, \alpha) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mapsto \varphi_i(x, \alpha) = f_i(x) - \alpha$ pour $i = 1, \ldots, m,$

montrer la propriété suivante :
Il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I(x^*)}$ de réels positifs, de somme égale à 1, telle que :

$$\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0.$$

5.2 On suppose de plus que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sont convexes sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que la propriété précédente est caractéristique d'un minimum global x^* de f sur $\mathbf{R}^n$.

6° Soit $m \in \mathbf{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ m vecteurs de $\mathbf{R}^n$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ m réels et

$$f : x \in \mathbf{R}^n \mapsto f(x) = \max\{< a_1, x > - b_1, < a_2, x > - b_2, \ldots, < a_m, x > - b_m\}.$$

6.1 Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

(e_1) f est bornée inférieurement sur $\mathbf{R}^n$;
(e_2) il existe $x^* \in \mathbf{R}^n$ minimisant f sur $\mathbf{R}^n$;
(e_3) il existe des réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, de somme égale à 1, tels que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0$;
(e_4) $\max\{< a_1, d >, < a_2, d >, \ldots, < a_m, d >\} \geq 0$ pour tout $d \in \mathbf{R}^n$.

6.2 On suppose ici que $m = 2p$, avec $p \in \mathbf{N}^*$ et

$$a_{p+i} = -a_i,\ b_{p+i} = -b_i, \text{ pour tout } i = 1, \ldots, p.$$

On sait d'après la question précédente que la borne inférieure de f sur $\mathbf{R}^n$ est atteinte.

On suppose que les vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont linéairement indépendants et on note $M(f)$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{R}^n$ minimisant f sur $\mathbf{R}^n$. Si $x^* \in M(f)$, préciser la valeur de $f(x^*)$.

Montrer qu'il existe un et un seul élément de $M(f)$ dans l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

7° Soit $q \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On se donne :

$t_0, t_1, \ldots, t_q$ $q+1$ points distincts d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbf{R}$ $(a < b)$;

$\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_q$ $q+1$ nombres réels ;

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant l'hypothèse $(\mathcal{H})$ suivante :

$(\mathcal{H})$ { Pour tout ensemble de n points distincts $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de $[a,b]$, la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de terme général $a_{kl} = \varphi_k(r_l), 1 \leq k \leq n$ et $1 \leq l \leq n$, est inversible.

L'objectif de cette question est de minimiser la fonction

$$f : x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto f(x) = \max_{i=0,1,\ldots,q} \left| \tau_i - \sum_{k=1}^{n} x_k \varphi_k(t_i) \right|$$

sur $\mathbf{R}^n$.

7.1 On suppose ici $q+1 \leq n$. Déduire des résultats de la 6° question qu'il existe $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$\text{(I E)} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k^* \varphi_k(t_i) = \tau_i \text{ pour tout } i = 0, 1, \ldots, q.$$

7.2 Dans cette question ainsi que dans la suivante 7.3, on suppose $n = q$. On veut montrer qu'il existe un et un seul x^* minimisant f sur $\mathbf{R}^n$; on pose $\rho = \inf_{x \in \mathbf{R}^n} f(x)$.

7.2.1 Si $\rho = 0$, prouver l'unicité de x^*.

7.2.2 Si $\rho > 0$, on note

$$I^-(x^*) = \{0 \leq i \leq n |\ \rho = \tau_i - \sum_{k=1}^{n} x_k^* \varphi_k(t_i)\},$$

$$I^+(x^*) = \{0 \leq i \leq n |\ \rho = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \varphi_k(t_i) - \tau_i\}.$$

Montrer à l'aide des résultats de la 5° question et de l'hypothèse $(\mathcal{H})$ que :

$$I^-(x^*) \cup I^+(x^*) = \{0, 1, \ldots, n\},\ I^-(x^*) \cap I^+(x^*) = \emptyset$$

et que ces deux ensembles d'indices ne dépendent pas de x^* minimisant f. En déduire l'unicité de x^*.

Tournez la page S.V.P.

7.3 On considère dans cette question la situation suivante :

$t_0 < t_1 < \ldots < t_n$
$\varphi_k(t) = t^{k-1}$ pour tout $k = 1, \ldots, n$.

7.3.1 Montrer que $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ minimise f sur $\mathbf{R}^n$ si, et seulement si, il existe $r \in \mathbf{R}$ tel que :

$$(\mathcal{A}) \qquad (-1)^i r + \sum_{k=1}^{n} x_k^* t_i^{k-1} = \tau_i \text{ pour tout } i = 0, 1, \ldots, n.$$

7.3.2 Soit Q_n (resp. Q_n^*) le polynôme de degré $\leq n$ (resp. de degré n) vérifiant

$$Q_n(t_i) = \tau_i \text{ pour tout } i = 0, 1, \ldots, n$$

(resp. $Q_n^*(t_i) = (-1)^i$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, n$).

On choisit $c^* \in \mathbf{R}$ de façon que $Q_n - c^* Q_n^*$ soit de degré $\leq n-1$. Montrer qu'alors

$$Q_n - c^* Q_n^* = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \varphi_k$$

fournit $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ minimum de f sur $\mathbf{R}^n$.

7.3.3 On traite ici un exemple. Soit

$t_0 = -1, t_1 = -1/2, t_2 = 0, t_3 = 1/2, t_4 = 1$
$\tau_0 = 1, \tau_1 = 1/2, \tau_2 = 0, \tau_3 = 1/2, \tau_4 = 1$

Trouver l'unique $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ minimum de

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto f(x) = \max_{i=0,\ldots,4} \left| \tau_i - \sum_{k=1}^{4} x_k t_i^{k-1} \right|$$

sur $\mathbf{R}^4$.

TROISIEME PARTIE

Notations

$\mathbf{R}_+$: ensemble des réels positifs.

Etant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique semidéfinie positive, on appelle pseudo-inverse de A, et on note A^+, l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ définie comme suit :

Pour $y \in \mathbf{R}^n$, soit $\bar{y}$ la projection orthogonale de y sur $\mathrm{Im}A$; il existe alors un et un seul $x \in \mathrm{im}A$ tel que $Ax = \bar{y}$. L'application (linéaire) $y \mapsto x = A^+ y$ est la pseudo-inverse de A.

Etant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique définie positive, on appelle factorisation de Cholesky de A la factorisation $A = CC^{\mathrm{T}}$, où $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est triangulaire inférieure avec tous ses éléments diagonaux strictement positifs.

Présentation : Soit $\delta > 0$, $b \in \mathbf{R}^n$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. On considère le problème de minimisation suivant :

$(\mathcal{P})$ Minimiser $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{2} < Bx, x > + < b, x >$ sur $S = \overline{B}(0, \delta)$.

Agrégation Externe . Options . 1992 – 9 –

On dira que $x^* \in S$ est solution de $(\mathcal{P})$ lorsque x^* est un minimum global de f sur S. Résoudre $(\mathcal{P})$ signifie donc trouver les minima globaux de f sur S.

8° On commence par traiter un exemple simple : $n = 2$, $b = (1,0)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α est un réel. Trouver la (ou les) solution(s) de $(\mathcal{P})$ suivant δ et α.

9°

9.1 On traite ici des cas où des points intérieurs à S pourraient être solutions de $(\mathcal{P})$.

9.1.1 A quelles conditions (nécessaires et suffisantes) sur B et b le point $x^* = 0$ est-il solution de $(\mathcal{P})$?

9.1.2 A quelles conditions (nécessaires et suffisantes) sur B et b n'y a-t-il pas de solutions de $(\mathcal{P})$ sur la frontière de S ?

9.2

9.2.1 On suppose que x^*, solution de $(\mathcal{P})$, vérifie $\|x^*\| = \delta$.
Montrer qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que :

(α) : $(B + \lambda I_n)x^* + b = 0$;
(β) : $B + \lambda I_n$ est semidéfinie positive.

9.2.2 Réciproquement, soit x^* vérifiant $\|x^*\| = \delta$ et pour lequel il existe $\lambda \geq 0$ assurant (α) et (β). Montrer que x^* est alors solution de $(\mathcal{P})$.

9.2.3 Soit x^* vérifiant $\|x^*\| = \delta$ et pour lequel il existe $\lambda \geq 0$ assurant (α) et
(β') : $B + \lambda I_n$ est définie positive.
Vérifier que x^* est alors la seule solution de $(\mathcal{P})$.

9.3 Rassembler tous les cas traités en un énoncé clair et précis donnant une condition nécessaire et suffisante pour que $x^* \in S$ soit un minimum global de f sur S.

10°

10.1 Résoudre le problème $(\mathcal{P})$ lorsque $B = 0$ et $b \neq 0$.

Dans toute la suite on désignera par λ_1 la plus petite valeur propre de B et par E_1 le sous-espace propre associé.

10.2 Résoudre le problème $(\mathcal{P})$ lorsque $b = 0$.

On suppose désormais $B \neq 0$ et $b \neq 0$. Pour tout $\lambda > -\lambda_1$ on désigne par $x(\lambda)$ la seule solution de

$$(B + \lambda I_n)x + b = 0,$$

et on pose $\theta(\lambda) = \|x(\lambda)\|$.

10.3 Etudier les variations et la convexité de la fonction θ sur $]-\lambda_1, +\infty[$. On s'attachera notamment à déterminer $\lim_{\lambda \downarrow -\lambda_1} \theta(\lambda)$ dans les différents cas possibles.

10.4 A quelles conditions l'équation $\theta(\lambda) = \delta$ a t-elle des racines sur $]-\lambda_1, +\infty[\cap \mathbf{R}_+$? Comment ces racines conduisent-elles aux solutions de $(\mathcal{P})$? Discuter suivant les cas.

10.5 On définit la fonction $\psi :]-\lambda_1, +\infty[\to \mathbf{R}$ comme suit :

$$\lambda \in]-\lambda_1, +\infty[\mapsto \psi(\lambda) = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\theta(\lambda)}.$$

Tournez la page S.V.P.

Montrer que ψ est convexe.

10.6 Dans cette question et la suivante 10.7, on fait l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$\lambda_1 < 0,\ b \text{ n'est pas orthogonal à } E_1 \text{ ou bien } \|(B - \lambda_1 I_n)^+ b\| > \delta.$$

On considère l'algorithme suivant :

- Etape 0 : initialisation, $\lambda^0 \in]-\lambda_1, +\infty[$.
- Etape k : construction de λ^{k+1} à partir de λ^k :

Soit $\lambda \mapsto \bar{\theta}_k(\lambda) = \dfrac{a_k}{b_k + \lambda} - \delta$ la fonction rationnelle de λ telle que

$$\bar{\theta}_k(\lambda^k) = \theta(\lambda^k), \quad \bar{\theta}'_k(\lambda^k) = \theta'(\lambda^k).$$

On prend pour λ^{k+1} la racine de l'équation $\bar{\theta}_k(\lambda) = 0$.

10.6.1 Exprimer λ^{k+1} en fonction de $\lambda^k, \theta(\lambda^k), \theta'(\lambda^k)$ et δ.

10.6.2 Comparer l'algorithme précédent à l'algorithme de Newton pour résoudre l'équation $\psi(\lambda) = 0$.

10.7 On considére l'algorithme suivant :

- Etape 0 : initialisation, $\lambda^0 \in]-\lambda_1, +\infty[$ avec $\theta(\lambda^0) > \delta$.
- Etape k : construction de λ^{k+1} à partir de λ^k :
  - . Factorisation CC^{T} de Cholesky de $B + \lambda^k I_n$;
  - . Résolution de $CC^{\mathrm{T}} u = -b$;
  - . Résolution de $Cv = u$;

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \left(\frac{\|u\|}{\|v\|}\right)^2 \left(\frac{\|u\| - \delta}{\delta}\right).$$

Vérifier que cet algorithme est l'algorithme de Newton pour résoudre $\psi(\lambda) = 0$.

Quels résultats de convergence peut-on donner à son sujet ?

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Le problème concerne le mouvement d'un système de corps rigides autour d'un point fixe, ainsi que le mouvement d'un satellite en orbite autour d'une planète sphérique.

Les trois parties sont indépendantes.

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie, on considère le mouvement d'un solide pesant (S), de masse m, de centre d'inertie G, mobile sans frottement autour d'un point O fixe. Soit $\vec{\gamma}$ le vecteur unitaire de la verticale ascendante, g l'accélération (supposée constante) de la pesanteur ; soit $\overleftrightarrow{\mathscr{I}_0}$ le tenseur d'inertie en O de (S), $\vec{\omega}$ le vecteur rotation absolue de (S).

1. Montrer que le théorème du moment cinétique en O appliqué à (S) s'écrit :

(1) $$\overleftrightarrow{\mathscr{I}_0}\,\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \overleftrightarrow{\mathscr{I}_0}\,\vec{\omega} = mg(\vec{\gamma} \wedge \overrightarrow{OG})$$

où $\dot{\vec{\omega}}$ désigne la dérivée absolue par rapport au temps du vecteur $\vec{\omega}$.

2. Montrer que $\vec{\gamma}$ vérifie l'équation :

(2) $$\overset{*}{\dot{\vec{\gamma}}} + \vec{\omega} \wedge \vec{\gamma} = \vec{0}$$

$\overset{*}{\dot{\vec{\gamma}}}$ désignant la dérivée relative (par rapport au temps) de $\vec{\gamma}$ par rapport à (S).

3. Montrer que le système d'équations (1) et (2) admet les trois intégrales premières suivantes :

$$F_1 \equiv (\overleftrightarrow{\mathscr{I}_0}\,\vec{\omega}) \cdot \vec{\gamma} = \ell$$

$$F_2 \equiv \frac{1}{2}(\vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{I}_0}\,\vec{\omega}) + mg(\overrightarrow{OG} \cdot \vec{\gamma}) = h$$

$$F_3 \equiv \gamma^2 - 1 = 0$$

où ℓ et h sont des constantes. Quelles sont les interprétations mécaniques des intégrales F_1 et F_2 ?

4. On s'intéresse maintenant aux rotations permanentes de (S), c'est-à-dire à des mouvements particuliers de (S) pour lesquels $\vec{\omega} = n\vec{\gamma}$ (n constant).

a. Montrer que les rotations permanentes sont solutions de l'équation :

(3) $$n^2(\vec{\gamma} \wedge \overleftrightarrow{\mathscr{I}_0}\,\vec{\gamma}) = mg(\vec{\gamma} \wedge \overrightarrow{OG})$$

b. Soit $(O ; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un trièdre constitué par les axes principaux d'inertie en O de (S). On suppose que G appartient à $O\vec{x}$ et on pose $\overrightarrow{OG} = x_0\vec{i}$ ($\vec{i}$ vecteur unitaire de $O\vec{x}$, x_0 constant). Montrer que (3) admet la solution $\vec{\gamma} = \vec{i}$. À quel mouvement particulier ($\mathscr{P}$) de (S) cette solution correspond-elle ?

Tournez la page S.V.P.

c. Pour étudier la stabilité de la solution $(\mathscr{P})$, on introduit les composantes $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ de $\vec{\gamma}$ par rapport aux axes $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ainsi que les composantes (p, q, r) de $\vec{\omega}$ dans ces mêmes axes. (A, B, C) désignant les moments d'inertie principaux de (S) en O, on suppose que $C > A > B$ et que $\overrightarrow{OG} = x_0 \vec{i}$ avec $x_0 < 0$.

On pose $\gamma_1 = 1 + u$, $p = n + v$ et on suppose que $u, \gamma_2, \gamma_3, v, q, r$ ainsi que leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps sont des infiniment petits.

α. Écrire les équations différentielles déduites des équations (1) et (2) en ne gardant que les termes du premier ordre par rapport à $(u, \gamma_2, \gamma_3, v, q, r)$. De l'étude de l'équation caractéristique associée au système obtenu, déduire qu'une condition nécessaire de stabilité de $(\mathscr{P})$ est :

$$(\mathscr{C}) \qquad x_0 < \frac{n^2 (A - C)}{mg}.$$

β. Donner l'expression des intégrales premières F_1, F_2, F_3 en fonction de $(u, \gamma_2, \gamma_3, v, q, r)$. Montrer que u est un infiniment petit du second ordre par rapport à γ_2 et γ_3. Exprimer u en fonction de γ_2 et γ_3 en négligeant les termes d'ordre strictement supérieur à 2.

On considère la fonction :

$$F \equiv F_2 - nF_1 + A n^2/2 - mg x_0 .$$

Donner un développement de F en série de Taylor par rapport à $\gamma_2, \gamma_3, v, q, r$ en se limitant à l'ordre 2. En utilisant la théorie des fonctions de Liapounoff, en déduire que $(\mathscr{C})$ est aussi une condition suffisante de stabilité de $(\mathscr{P})$.

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, on considère le mouvement d'un système (Σ) (appelé gyrostat), constitué par un solide (S) mobile sans frottement autour d'un point fixe O et de p solides de révolution (S_α) $(\alpha = 1, ..., p)$, appelés rotors dont les axes de révolution $\vec{\Delta}_\alpha$ passent par O et sont fixes par rapport à (S). On suppose que le moment cinétique relatif $\vec{h}$ des rotors par rapport à (S) est un vecteur lié à (S) et que le moment résultant en O des forces extérieures appliquées au système (Σ) est nul.

On note $\vec{\omega}$ le vecteur rotation absolue de (S) et $\vec{\vec{\mathscr{I}}}_0$ le tenseur d'inertie en O de (Σ).

1. Montrer que le moment cinétique absolu en O de (Σ) s'écrit :

$$\vec{H}_0(\Sigma) = \vec{\vec{\mathscr{I}}}_0\,\vec{\omega} + \vec{h}$$

En déduire que le théorème du moment cinétique en O appliqué à (Σ) s'écrit :

(4) $$\vec{\vec{\mathscr{I}}}_0\,\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\vec{\mathscr{I}}}_0\,\vec{\omega} + \vec{h}) = \vec{0}$$

avec $\dot{\vec{\omega}}$ dérivée absolue par rapport au temps de $\vec{\omega}$.

2. Montrer que (4) admet les deux intégrales premières :

$$\left.\begin{aligned} V_1 &\equiv \vec{\omega}\cdot\vec{\vec{\mathscr{I}}}_0\,\vec{\omega} = k \\ V_2 &\equiv (\vec{\vec{\mathscr{I}}}_0\,\vec{\omega} + \vec{h})^2 = L^2 \end{aligned}\right\} \quad k \text{ et } L \text{ sont des constantes.}$$

Donner l'interprétation mécanique de ces intégrales premières.

3. Montrer que les rotations permanentes de (Σ), c'est-à-dire les mouvements $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0$ (avec $\vec{\omega}_0$ vecteur constant), vérifient l'équation :

(5) $$\vec{\omega}_0 \wedge (\vec{\vec{\mathscr{I}}}_0\,\vec{\omega}_0 + \vec{h}) = \vec{0}$$

4. Soit $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un trièdre d'axes principaux d'inertie de (Σ) en O ; on suppose que le moment cinétique relatif $\vec{h}$ des rotors en O est porté par $O\vec{x}$ et on pose $\vec{h} = h_1\,\vec{i}$ ($\vec{i}$ vecteur unitaire de $O\vec{x}$, h_1 constant). Montrer que (5) admet la solution $\vec{\omega}_0 = \omega_0\,\vec{i}$ (ω_0 constant). Montrer que $\vec{i}$ est un vecteur fixe. À quel mouvement particulier $(\mathscr{P}_1)$ de (Σ) correspond cette solution ?

5. Soient (p, q, r) les composantes de la rotation absolue $\vec{\omega}$ de (Σ) sur $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et (A, B, C) les moments principaux d'inertie en O de (Σ).

Afin d'étudier la stabilité du mouvement particulier $(\mathscr{P}_1)$, on pose $p = \omega_0 + u$ et on suppose que (u, q, r) ainsi que leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps sont des infiniment petits.

a. Écrire le système différentiel déduit de (4) en ne gardant que les termes d'ordre 1 par rapport à (u, q, r). En déduire que :

$$[(A - C)\,\omega_0 + h_1]\;[(A - B)\,\omega_0 + h_1] > 0$$

est une condition nécessaire de stabilité de $(\mathscr{P}_1)$.

b. On considère la fonction :

$$V \equiv (A\,\omega_0 + h_1)\,V_1 - \omega_0\,V_2 + \alpha\,(V_1 - A\,\omega_0^2)^2 + h_1\,\omega_0\,(h_1 + A\,\omega_0)$$

où α est une constante positive.

Donner un développement en série de Taylor de V par rapport à (u, q, r) en se limitant à l'ordre 2. Montrer que l'on peut choisir α de manière que si les deux conditions :

$$\left.\begin{aligned} &\omega_0\,(A - B) + h_1 > 0 \\ &\omega_0\,(A - C) + h_1 > 0 \end{aligned}\right.$$

sont remplies, V est une fonction définie positive. Que peut-on en déduire pour la stabilité du mouvement $(\mathscr{P}_1)$?

Tournez la page S.V.P.

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie, on considère le mouvement d'un satellite (S) de masse m, de centre d'inertie G, placé dans le champ de gravitation de la Terre, supposée sphérique, de centre T. $(T ; \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ désignant un repère absolu d'origine T, on suppose que G décrit un cercle de centre T dans le plan $(T ; \vec{X}, \vec{Y})$ avec la vitesse angulaire constante ω_0 définie par :

$$\omega_0 = \left(\frac{f}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

où $R = \|\overrightarrow{TG}\|$ et f est une constante.

On admettra qu'une valeur approchée du moment résultant en G des forces gravitationnelles exercées sur (S) s'écrit :

$$\vec{M}_G = 3\,\omega_0^2\,\vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\mathcal{J}_G}\,\vec{e}_3$$

où $\overrightarrow{\mathcal{J}_G}$ est le tenseur d'inertie en G de (S) et $\vec{e}_3 = \dfrac{\overrightarrow{TG}}{R}$.

I. Dans cette partie, le satellite (S) est constitué d'un seul solide rigide.

1. Montrer que le théorème du moment cinétique en G appliqué à (S) s'écrit :

(6) $$\overrightarrow{\mathcal{J}_G}\,\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathcal{J}_G}\,\vec{\omega} = 3\,\omega_0^2\,\vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\mathcal{J}_G}\,\vec{e}_3$$

où $\vec{\omega}$ désigne la rotation absolue de (S) et $\dot{\vec{\omega}}$ sa dérivée absolue par rapport au temps.

2. On introduit le repère mobile $(\mathcal{R}) = (G ; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (repère orbitant) tel que $\vec{e}_2$ soit parallèle et de même sens que $\vec{TZ}$; $\vec{e}_1$ est alors porté par la tangente en G à la trajectoire de G.

   a. Montrer que les positions d'équilibre relatif de (S) par rapport au repère orbitant $(\mathcal{R})$ sont solutions de l'équation :

$$\vec{e}_2 \wedge \overrightarrow{\mathcal{J}_G}\,\vec{e}_2 - 3\,\vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{\mathcal{J}_G}\,\vec{e}_3 = \vec{0}$$

   b. Montrer, dans le cas où les moments d'inertie principaux (A, B, C) de (S) sont distincts, que les seules positions d'équilibre relatif de (S) par rapport au repère orbitant $(\mathcal{R})$ sont celles pour lesquelles $(\mathcal{R})$ est un repère principal d'inertie de (S). Combien y a-t-il de positions d'équilibre relatif possibles ?

3. Soit $(G ; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère principal d'inertie en G de (S). On note (p, q, r) et $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ les composantes de la rotation absolue $\vec{\omega}$ de (S) et les composantes de $\vec{e}_3$ sur $(G ; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On introduit les angles d'Euler (fig. 1) (θ, ψ, φ) des axes $(G ; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par rapport au repère $(\mathcal{R})$.

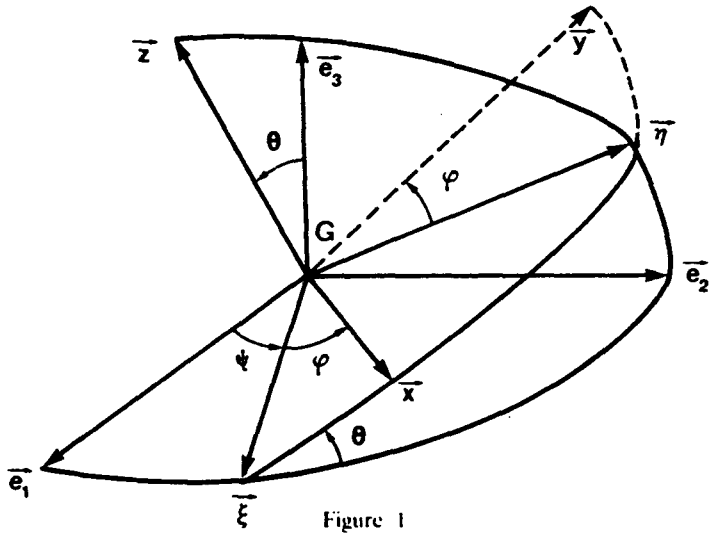

Figure 1

a. Exprimer (p, q, r) et $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ en fonction de (θ, ψ, φ) et éventuellement de leurs dérivées par rapport au temps.

b. Montrer que $(E_0)\left(\theta = \varphi = \frac{\pi}{2}, \psi = \pi\right)$ correspond à une position d'équilibre relatif de (S).

4. Étude de la stabilité de (E_0) : on pose $\theta = \frac{\pi}{2} + u$, $\psi = \pi + v$, $\varphi = \frac{\pi}{2} + w$; (u, v, w) ainsi que leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps sont des infiniment petits.

Déduire des équations (6) le système des équations linéarisées au voisinage de (E_0). En déduire les conditions nécessaires de stabilité de (E_0) suivantes :

$$B - A > 0 \qquad (C - B)(C - A) > 0$$

II. Le satellite (S) est maintenant un gyrostat, c'est-à-dire qu'il comprend un solide (S_0) de centre d'inertie G et p solides de révolution (S_α) (rotors) dont les axes Δ_α $(\alpha = 1, \ldots, p)$ sont fixes par rapport à (S_0) et passent par G. On suppose que le moment cinétique relatif $\vec{h}$ des rotors par rapport à (S_0) est un vecteur lié à (S_0) et que G est aussi le centre d'inertie de (S).

1. Montrer que le théorème du moment cinétique en G appliqué à (S) s'écrit :

(7) $$\overleftrightarrow{\mathcal{I}_G}\,\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \left(\overleftrightarrow{\mathcal{I}_G}\,\vec{\omega} + \vec{h}\right) = 3\,\omega_0^2\,\vec{e}_3 \wedge \overleftrightarrow{\mathcal{I}_G}\,\vec{e}_3$$

où $\overleftrightarrow{\mathcal{I}_G}$ est le tenseur d'inertie en G de (S), $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation absolue de (S_0), $\dot{\vec{\omega}}$ étant la dérivée absolue de $\vec{\omega}$.

2. On introduit le repère orbitant $(\mathcal{R})$: $(G; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ défini en I.2. :

a. Montrer que les positions d'équilibre relatif de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$ sont déterminées par l'équation :

(8) $$\vec{e}_2 \wedge \left(\overleftrightarrow{\mathcal{I}_G}\,\vec{e}_2 + \frac{\vec{h}}{\omega_0}\right) - 3\,\vec{e}_3 \wedge \overleftrightarrow{\mathcal{I}_G}\,\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

En déduire les trois relations :

(9) $$\vec{e}_1 \cdot \overleftrightarrow{\mathcal{I}_G}\,\vec{e}_3 = 0$$

(10) $$\vec{e}_1 \cdot \left(\overleftrightarrow{\mathcal{I}_G}\,\vec{e}_2 + \frac{\vec{h}}{\omega_0}\right) = 0$$

(11) $$\vec{e}_3 \cdot \left(4\,\overleftrightarrow{\mathcal{I}_G}\,\vec{e}_2 + \frac{\vec{h}}{\omega_0}\right) = 0$$

Dans la discussion qui suit, on suppose que les moments d'inertie principaux de (S) sont distincts.

b. On suppose que le moment cinétique $\vec{h}$ des rotors est porté par $\vec{e}_2$. Montrer que les seuls équilibres relatifs de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$ sont ceux pour lesquels $(\mathcal{R})$ est un repère principal d'inertie.

c. On suppose que $\vec{h}$ est perpendiculaire à $\vec{e}_3$ (resp à $\vec{e}_1$). Montrer que les seuls équilibres relatifs de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$ sont ceux pour lesquels $\vec{e}_3$ (resp $\vec{e}_1$) est axe principal d'inertie de (S). Déterminer dans les deux cas la position par rapport à $(\mathcal{R})$ des deux autres axes principaux d'inertie de (S) en G.

Tournez la page S.V.P.

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Avertissement. Les parties A, B, D questions 1 à 6 peuvent être traitées de manière indépendante.

Notations - Définitions - Résultats

On adopte dans cet énoncé les notations et définitions suivantes.

1 - $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

2 - Si $(X, \mathcal{B}, \eta)$ est un espace probabilisé $\mathbb{L}^p(X, \mathcal{B}, \eta)$ $p \geq 1$ désigne l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles et de puissance p-ième intégrable au sens de Lebesgue sur $(X, \mathcal{B}, \eta)$. L'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ $p \geq 1$ est défini de manière analogue. De plus si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ on note $\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx)$.

3 - 1_A désigne la fonction indicatrice d'un ensemble A.

4 - Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La moyenne d'une variable aléatoire $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est notée $E(X)$ et si $\mathcal{B}$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$ l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ est notée $E(X|\mathcal{B})$. La sous tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par une famille finie (Y_i) $1 \leq i \leq p$ de variables aléatoires est notée $\mathcal{F}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$.

5 - $*$ désigne deux sortes de convolution. Pour des probabilités α et β sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ $\alpha * \beta$ est la probabilité définie par

$$\alpha * \beta(B) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(dx) \int_{\mathbb{R}} 1_B(x+y)\beta(dy) \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Si f est une fonction borélienne telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $u \to f(t-u)$ est un élément de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \alpha)$ $\alpha * f$ est définie par

$$\alpha * f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-u)\ \alpha(du) \quad t \in \mathbb{R}$$

$\alpha^{(n)}$ $n \geq 1$ désigne la nième puissance de convolution de α et $\alpha^{(0)}$ est la masse de Dirac en 0, notée ϵ_0.

6 - Une probabilité α sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ possède des moments exponentiels si pour tout réel t l'application $y \to e^{ty}$ appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \alpha)$. Le support de α est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ de complémentaire de probabilité nulle par rapport à α. La probabilité α est dite non arithmétique si le sous groupe fermé de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par le support de α est $\mathbb{R}$.

7 - $I(\mathcal{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions réglées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{x \in [n, n+1]} |f(x)| < +\infty$.

Tournez la page S.V.P.

On rappelle l'énoncé suivant (théorème de Fubini). Soit $(E_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ $i = 1,2$ deux espaces probabilisés et f une application mesurable de $(E_1 \times E_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ les conditions suivantes sont équivalentes

$$x_1 \to \int_{E_2} |f|(x_1, x_2)\mu_2(dx_2) \text{ est un élément de } \mathbb{L}^1(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1) \qquad (1)$$

$$x_2 \to \int_{E_1} |f|(x_1, x_2)\mu_1(dx_1) \text{ est un élément de } \mathbb{L}^1(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2) \qquad (2)$$

et si elles sont vérifiées on a l'égalité

$$\int_{E_1} \mu_1(dx_1) \int_{E_2} f(x_1, x_2)\mu_2(dx_2) = \int_{E_2} \mu_2(dx_2) \int_{E_1} f(x_1, x_2)\mu_1(dx_1)$$

Par ailleurs cet énoncé reste valide en remplaçant l'un ou les deux espaces $(E_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ $1 \leq i \leq 2$ par $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$.

Dans ce problème on considère une suite $X = (X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi μ. On définit alors pour tout $n \geq 1$ la variable aléatoire S_n par $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la variable aléatoire $N(B)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par $N(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1_B(S_n)$.

- A -

Dans ce paragraphe on suppose que la probabilité μ possède des moments exponentiels et l'on définit l'application ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la formule $\psi(t) = E\{e^{tX_1}\}$ $t \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que $m = E(X_1) > 0$

1 - a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a $E(e^{t|X_1|}) < +\infty$ et en déduire que ψ est analytique. Prouver que $\psi'(0) = m$ et qu'il existe un réel $t_0 < 0$ tel que $\psi(t_0) < 1$

b) Calculer $E(e^{t_0 S_n})$ $n \geq 1$ en fonction de $\psi(t_0)$

c) En utilisant l'inégalité $1_{[-1,1]}(x) \leq e^{-t_0} e^{t_0 x}$ $x \in \mathbb{R}$ montrer que

$$E\{N([-1,1])\} \leq \frac{e^{-t_0}\psi(t_0)}{1 - \psi(t_0)}.$$

2 - Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur égale à 1. On définit la variable aléatoire T_I à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$ par $T_I = \inf\{n \geq 1; S_n \in I\}$ où l'on convient que $\inf \emptyset = +\infty$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a $\{T_I = k\} \in \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$

b) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a

$$1_{\{T_I = k\}} \times N(I) = 1_{\{T_I = k\}}[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 1_I(S_{n+k})]$$

et que

$$1_{\{T_I=k\}} \times 1_I(S_{n+k}) \leq 1_{\{T_I=k\}} \times 1_{[-1,1]}(S_{n+k} - S_k) \quad n \geq 1 \quad k \geq 1.$$

c) En déduire que

$$E\{N(I)\} \leq \mathbb{P}\{[T_I < +\infty]\}(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{[|S_n| \leq 1]\}) \leq 1 + E\{N([-1,1])\}$$

d) Montrer que pour tout compact J de $\mathbb{R}$ on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} E\{N(x+J)\} < +\infty$$

- B -

Dans ce paragraphe on suppose que la probabilité μ est non arithmétique. On désigne par $\mathcal{H}_\mu$ l'espace vectoriel des fonctions h continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x+y)\mu(dy)$$

1 - Soit $h \in \mathcal{H}_\mu$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 1$ on a

$$E\{h(S_{n+p})|\mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\} = h(S_n)$$

$\mathbb{P}$ presque sûrement et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ on a $h(x) = E\{h(x + S_n)\}$.

2 - Soit $h \in \mathcal{H}_\mu$

a) Etablir que pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 1$ on a

$$E\{[h(S_{n+p}) - h(S_n)]^2\} = E\{h^2(S_{n+p})\} - E\{h^2(S_n)\}$$

b) En déduire que la suite $(E\{h^2(S_n)\})$ $n \geq 1$ est monotone et converge dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la suite de variables aléatoires $(h(S_n))_{n \geq 1}$ converge dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vers une variable aléatoire Z et que $h(0) = E\{Z\}$.

3 - Soit $h \in \mathcal{H}_\mu$

a) On pose $u_n = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} \{h(S_n(\omega)) - h(S_n(\omega) + y)\}^2 \mathbb{P}(d\omega)\mu(dy)$ $n \geq 1$

Agrégation Externe. Options. 1992.

Montrer que $u_n = E\{[h(S_n) - h(S_{n+1})]^2\}$ et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente. En déduire qu'il existe un sous ensemble M de $\Omega \times \mathbb{R}$ appartenant à la tribu produit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tel que $\mathbb{P} \otimes \mu(M) = 1$ et que pour tout $(\omega, y) \in M$ on ait

$$\lim_{n \to +\infty} [h(S_n(\omega)) - h(S_n(\omega) + y)] = 0$$

b) En utilisant le théorème de Fubini montrer qu'il existe $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tel que $\mu(A) = 1$, et que pour tout $y \in A$ on ait $\mathbb{P}(M_y) = 1$ où $M_y = \{\omega; (\omega, y) \in M\}$. En déduire que pour tout élément y du support de μ on a $h(y) = h(0)$.

4 - Soit $h \in \mathcal{H}_\mu$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'application $x \to h(x + t)$ est un élément de $\mathcal{H}_\mu$. En déduire que tout élément du support de μ est une période de h. Prouver de plus que l'ensemble des périodes de h est un sous groupe fermé de $(\mathbb{R}, +)$ et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h(x) = h(0)$.

- C -

On suppose dans cette partie que la probabilité μ est non arithmétique, possède des moments exponentiels et que $m = E(X_1) > 0$.

On désigne par P_μ l'espace vectoriel des fonctions f mesurables bornées de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telles que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{(n)} * f(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Pour $f \in P_\mu$ la somme de cette série est notée $U(x, f)$.

Soit J un compact de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu^{(n)} * 1_J(x) = \mathbb{P}\{[S_n \in x - J]\} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{(n)} * 1_J(x) = 1_{\{x-J\}}(0) + E\{N(x - J)\}.$$

Il résulte de A que $1_J \in P_\mu$ et que $\sup_{x \in \mathbb{R}} U(x, 1_J) < +\infty$.

On note $C_K(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact. Pour $\phi \in C_K(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$ on définit $\phi_x \in C_K(\mathbb{R})$ par $\phi_x(t) = \phi(t - x)\ t \in \mathbb{R}$. On pourra dans la suite utiliser le résultat suivant : Si η est une forme linéaire positive sur $C_K(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction $\phi \in C_K(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $\eta(\phi) = \eta(\phi_x)$, il existe une constante $c \geq 0$ telle que pour toute fonction $\phi \in C_K(\mathbb{R})$ $\eta(\phi) = c\lambda(\phi)$.

1 - a) Montrer que $C_K(\mathbb{R}) \subset P_\mu$ et que pour toute fonction $\phi \in C_K(\mathbb{R})$ de support J on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |U(x, \phi)| \leq [\sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)|] \times \sup_{x \in \mathbb{R}} U(x, 1_J).$$

b) Soit $\phi \in C_K(\mathbb{R})$ de support J. Etablir l'inégalité

$$|U(x,\phi) - U(y,\phi)| \leq 2C(J) \times \sup\{|\phi(u) - \phi(v)|; u, v \in \mathbb{R} \ \ |u-v| = |x-y|\}$$

où $C(J) = \sup_{t\in\mathbb{R}} U(t, 1_J)$. En déduire que $x \to U(x,\phi)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

c) On désigne par $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels tels que $\lim_n x_n = +\infty$. Prouver à l'aide de b) que pour toute fonction $\phi \in C_K(\mathbb{R})$ la suite de fonctions $(T_n(\cdot,\phi))\ \ n \geq 1$ définies par $T_n(x,\phi) = U(x_n - x, \phi)\ x \in \mathbb{R}$ est uniformément équicontinue sur $\mathbb{R}$.

d) On admettra que les résultats établis en a) et c) ainsi que la linéarité de l'application $\phi \to T_n(\cdot,\phi)$ permettent d'établir l'existence d'une sous suite $(\ell(n))_{n\geq 1}$ de $\mathbb{N}$ telle que pour toute fonction $\phi \in C_K(\mathbb{R})$ la suite $(T_{\ell(n)}(\cdot,\phi))_{n\geq 1}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$ vers une fonction $T(\cdot,\phi)$ continue bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $\phi \in C_K(\mathbb{R})$ établir la relation

$$T_n(x,\phi) = \phi(x_n - x) + \int_{\mathbb{R}} T_n(x+y,\phi)\mu(dy) \quad n \geq 1 \ \ x \in \mathbb{R}.$$

En déduire que $T(\cdot,\phi)$ est un élément de $\mathcal{H}_\mu$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $T(x,\phi) = T(0,\phi)$.

2 - Montrer que pour toute fonction $\phi \in C_K(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $T(x,\phi) = T(0,\phi_x)$. En déduire que $\phi \to T(0,\phi) = \alpha(\phi)$ est une forme linéaire positive sur $C_K(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction $\phi \in C_K(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$ $\alpha(\phi_x) = \alpha(\phi)$. En conclure qu'il existe une constante $c_1 \geq 0$ telle que pour toute $\phi \in C_K(\mathbb{R})$ on ait $\alpha(\phi) = T(0,\phi) = c_1\lambda(\phi)$.

3 - a) Montrer que $I(\mathcal{R}) \subset P_\mu$ et que de plus il existe une constante $K > 0$ telle que pour toute $f \in I(\mathcal{R})$ on ait

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |U(x,f)| \leq K \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in[n,n+1]} |f(x)|$$

b) On admettra que comme $\lim_{n\to+\infty} U(x_{\ell(n)},\phi) = \lim_{n\to+\infty} T_{\ell(n)}(0,\phi) = c_1\lambda(\phi)$ pour toute fonction $\phi \in C_K(\mathbb{R})$ on a également $\lim_{n\to+\infty} U(x_{\ell(n)}, f) = c_1\lambda(f)$ pour toute fonction f en escalier à support compact. En déduire que pour toute fonction $f \in I(\mathcal{R})$ on a $\lim_{n\to+\infty} U(x_{\ell(n)}, f) = c_1\lambda(f)$.

4 - Soit θ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\theta = H - \mu * H$ où $H(x) = 1_{[0,+\infty[}(x)$ $x \in \mathbb{R}$

a) Calculer θ. Montrer que $\theta \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ et que $\lambda(\theta) = m$. En utilisant les propriétés de monotonie de θ montrer de plus que $\theta \in I(\mathcal{R})$

Tournez la page S.V.P.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite $\mu^{(n)} * H(x) = E\{H(x - S_n)\}$ $n \geq 1$ converge vers 0. En déduire que $U(x, \theta) = H(x)$ et que $\lim_{x \to +\infty} U(x, \theta) = 1$.

c) En déduire à l'aide de 3 que $c_1 = \frac{1}{m}$ et que pour toute fonction $f \in I(\mathcal{R})$ $\lim_{n \to +\infty} U(x_{\ell(n)}, f) = \frac{1}{m}\lambda(f)$.

5 - Déduire de l'étude précédente que pour toute fonction $f \in I(\mathcal{R})$ on a

$$\lim_{x \to +\infty} \{\sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{(n)} * f(x)\} = \lim_{x \to +\infty} U(x, f) = \frac{\lambda(f)}{m}$$

- D -

Dans cette partie $(A_k)_{k \geq 1}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi satisfaisant aux hypothèses suivantes :

$$\mathbb{P}\{[A_1 > 0]\} = 1, \quad \mathbb{P}\{[A_1 > 1]\} > 0$$

$E\{(A_1)^t\} = \Phi(t)$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $E\{\log(A_1)\} < 0$. On suppose de plus que la loi de probabilité ν de $\log(A_1)$ est non arithmétique.

1 - Montrer à l'aide de la règle de Cauchy que la série $1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(A_1 A_2 \cdots A_k)$ est $\mathbb{P}$ presque sûrement convergente. On note R sa somme.

2 - Montrer que $\lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = +\infty$, et que l'application $t \to \Phi(t)$ est strictement convexe sur $[0, +\infty[$. Prouver qu'il existe un réel $\alpha_0 > 0$ tel que $\Phi(\alpha_0) = 1, \Phi(t) < 1$ si $0 < t < \alpha_0$. Etablir de plus que $E\{(A_1)^{\alpha_0} \log(A_1)\} > 0$.

3 - Pour $n \geq 1$ on définit la variable aléatoire $\sum_n$ par $\sum_n = \sum_{k=1}^{n}(A_1 A_2 \cdots A_k)$

Montrer que si $\alpha_0 \leq 1$ et $0 < \beta < \alpha_0$ on a $E\{(\sum_n)^\beta\} \leq \sum_{k=1}^{n}[\Phi(\beta)]^k$ et que si $\alpha_0 > 1$ $1 \leq \beta < \alpha_0$ on a $(E\{(\sum_n)^\beta\})^{1/\beta} \leq \sum_{k=1}^{n}[\Phi(\beta)]^{k/\beta}$.

En déduire que pour tout $0 < \beta < \alpha_0$ on a $E\{(R)^\beta\} < +\infty$ et que

$$\lim_{T \to +\infty} T^\beta \mathbb{P}\{[R > T]\} = 0.$$

4 - Soit R_1 la variable aléatoire définie par $R_1 = 1 + \sum_{j=2}^{+\infty}(A_2 A_3 \cdots A_j)$

a) Montrer que les variables aléatoires A_1 et R_1 sont indépendantes et que R_1 a même loi γ que R.

b) Vérifier que l'on définit une probabilité ν_0 sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ en posant

$$\nu_0(B) = E\{(A_1)^{\alpha_0} 1_B[\log(A_1)]\} \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

et montrer que pour toute fonction f borélienne bornée on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\nu_0(dx) = E\{(A_1)^{\alpha_0} f[\log(A_1)]\}$$

c) On considère les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ F_0 et ψ_0 définies par

$$F_0(t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\alpha_0}\mathbb{P}\{[R > u]\}du \quad \psi_0(t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\alpha_0}\mathbb{P}\{[u < R \leq u+1]\}du.$$

De la relation $R = 1 + A_1R_1$ déduire que

$$F_0(t) = E\{(A_1)^{\alpha_0}F_0[t - \log(A_1)]\} + \psi_0(t) = \nu_0 * F_0(t) + \psi_0(t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

5 - a) Montrer à l'aide du théorème de Fubini que pour tout $t \geq 0$ on a

$$0 \leq \psi_0(t) \leq \frac{e^{-t}}{\alpha_0+1}[\int_0^1 y^{\alpha_0+1}\gamma(dy) + \int_1^{e^t+1} y^{\alpha_0+1}\{1-(1-\frac{1}{y})^{\alpha_0+1}\}\gamma(dy)$$

et en déduire que pour $0 < \beta \quad \alpha_0 - 1 < \beta < \alpha_0$ on a pour tout $t \geq 0$

$$0 \leq \psi_0(t) \leq \frac{e^{-t}}{\alpha_0+1} + e^{-t}(e^t+1)^{\alpha_0-\beta} \times [\int_0^{+\infty} y^{\beta}\gamma(dy)]$$

b) Montrer que pour $t \leq 0 \quad 0 \leq \psi_0(t) \leq \frac{e^{\alpha_0 t}}{\alpha_0+1}$

c) En déduire que $\psi_0 \in I(\mathcal{R})$

6 - Montrer que $\nu_0^{(n)} * F_0(t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\alpha_0}E\{\gamma(]\frac{u}{A_1A_2\cdots A_n}, +\infty[)\}du$ pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$.

En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\nu_0^{(n)} * F_0(t) = 0$ et que $F_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\nu_0^{(n)} * \psi_0(t) \quad t \in \mathbb{R}$.

7 - Montrer que

$$m_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\nu_0(dx) = E\{(A_1)^{\alpha_0}\log(A_1)\} > 0$$

et prouver à l'aide de C_5 que

$$\lim_{t\to+\infty} F_0(t) = c_+ \text{ où } c_+ = \frac{1}{m_0}\int_0^{+\infty} u^{\alpha_0-1}\mathbb{P}\{[u < R \leq u+1]\}du \text{ et } 0 < c_+ < +\infty.$$

8 - a) Soit $0 < \epsilon < 1$ et $T > 0$. Etablir l'inégalité

$$T^{\alpha_0}\mathbb{P}\{[R > T]\} \leq T^{-1}\int_{(1-\epsilon)T}^{T} u^{\alpha_0}\mathbb{P}\{[R > u]\}du \times \frac{\alpha_0+1}{1-(1-\epsilon)^{\alpha_0+1}}.$$

Tournez la page S.V.P.

En déduire à l'aide de 7 que

$$\limsup_{T \to +\infty} T^{\alpha_0} \mathbb{P}\{[R > T]\} \leq c_+ \frac{(\alpha_0 + 1)\epsilon}{1 - (1 - \epsilon)^{\alpha_0 + 1}}$$

puis que $\limsup_{T \to +\infty} T^{\alpha_0} \mathbb{P}\{[R > T]\} \leq c_+$.

b) Démontrer de manière analogue que $\liminf_{T \to +\infty} T^{\alpha_0} \mathbb{P}\{[R > T]\} \geq c_+$ et en conclure que $\lim_{T \to +\infty} T^{\alpha_0} \mathbb{P}\{[R > T]\} = c_+$.

page 120 23/28 . 1992 -
Agrégation Externe . Options

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Dans ce problème, tous les alphabets sont finis. Dans la suite, A, B, C sont des alphabets. On note A^* le monoïde libre engendré par A. Un *mot* sur A est un élément de A^*. Si u et v sont des mots, on note uv le produit (de concaténation) de u et de v. La longueur d'un mot u est notée $|u|$. Le mot vide, de longueur 0, est noté ε. Soit $u = a_1 \cdots a_n$ un mot, avec $a_1, \ldots, a_n$ des lettres. L'*image miroir* de u est le mot $u^\sim = a_n a_{n-1} \cdots a_1$. En particulier, $\varepsilon^\sim = \varepsilon$. Un *langage* sur A est une partie de A^*.

Un *automate fini* $\mathcal{A} = (Q, I, T, E)$ sur A est composé d'un ensemble fini Q d'*états*, de deux parties I et T de Q appelées ensembles d'états *initiaux* et *terminaux*, et d'un ensemble $E \subset Q \times A \times Q$ de *flèches*. Un *calcul* de p à q est une suite finie $c = (e_1, \ldots, e_n)$ de flèches $e_i = (p_i, a_i, q_i)$ telles que $p = p_1$, $q = q_n$, et $p_i = q_{i-1}$ pour $i = 2, \ldots, n$. Le mot $u = a_1 \cdots a_n$ est l'*étiquette* de c. L'entier n est la *longueur* du calcul. Le calcul c est *réussi* si $p \in I$ et $q \in T$. Un mot u est *reconnu* par $\mathcal{A}$ s'il existe un calcul réussi dont l'étiquette est u. Le *langage reconnu* par $\mathcal{A}$, noté $L(\mathcal{A})$, est l'ensemble des mots reconnus par $\mathcal{A}$. Un langage L sur A est *reconnaissable* s'il existe un automate fini sur A qui reconnaît L. On rappelle que l'intersection de deux langages reconnaissables est reconnaissable, et que si deux langages ne diffèrent que par un nombre fini de mots, alors l'un des langages est reconnaissable si et seulement si l'autre l'est.

On note $\wp(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E, et pour deux parties X et Y de E, on note $X \setminus Y = \{x \mid x \in X,\ x \notin Y\}$.

PREMIÈRE PARTIE

Soit $k \geq 2$ un entier. On considère l'alphabet $A_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ et on définit la fonction

$$\nu_k : A_k^* \to \mathbf{N}$$

en posant, pour $w = a_0 \cdots a_n$ ($a_i \in A_k$, pour $0 \leq i \leq n$) :

$$\nu_k(w) = \sum_{i=0}^{n} a_i k^{n-i}$$

En particulier, $\nu_k(\varepsilon) = 0$. La fonction

$$\rho_k : \mathbf{N} \to A_k^* \setminus 0A_k^*$$

associe à chaque entier n l'unique mot w ne commençant pas par 0 et tel que $\nu_k(w) = n$. Une partie H de $\mathbf{N}$ est *k-reconnaissable* si le langage $\rho_k(H)$ est reconnaissable sur A_k.

1.– Démontrer que $\{k^m \mid m \in \mathbf{N}\}$ est k-reconnaissable.

2.– a) Démontrer que l'ensemble des entiers positifs ou nuls qui sont multiples de 3 est 2-reconnaissable.

Tournez la page S.V.P.

b) Soient a et b deux entiers naturels tels que $0 \leq b < a$. Démontrer que l'ensemble $\{am + b \mid m \in \mathbf{N}\}$ est k-reconnaissable, quel que soit k.

c) Est-ce que la même conclusion reste valable sans la restriction $0 \leq b < a$?

3.– Soit $K \subset A_k^*$, et soient $H = \nu_k(K)$ et $L = \rho_k(H)$.
a) Démontrer que si K est un langage reconnaissable, alors L est un langage reconnaissable.

b) En déduire qu'un partie H de $\mathbf{N}$ est k-reconnaissable si et seulement s'il existe un langage reconnaissable K sur A_k tel que $H = \nu_k(K)$.

4.– Soit $\ell = k^2$. Démontrer qu'une partie H de $\mathbf{N}$ est k-reconnaissable si et seulement si elle est ℓ-reconnaissable.

DEUXIÈME PARTIE

Une *transduction* f de A^* dans B^* est une application de $\wp(A^*)$ dans $\wp(B^*)$ vérifiant

$$f(K) = \bigcup_{k \in K} f(\{k\})$$

pour tout $K \subset A^*$. Une transduction est déterminée par sa donnée sur les mots. Lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre, on écrira $f(k)$ au lieu de $f(\{k\})$. Le *graphe* de la transduction est l'ensemble $G(f) = \{(u, v) \in A^* \times B^* \mid v \in f(u)\}$. Si K est un langage sur un alphabet A, on note $\cap_K$ la transduction de A^* dans lui-même définie par $\cap_K(u) = \{u\} \cap K$.

Un *transducteur* $\mathcal{M} = (Q, I, T, E)$ de A^* dans B^* est composé d'un ensemble fini Q d'*états*, de deux parties I et T de Q appelées ensembles d'états *initiaux* et *terminaux*, et d'un ensemble fini $E \subset Q \times A^* \times B^* \times Q$ de *flèches*. Un *calcul* de p à q est une suite finie $c = (e_1, \ldots, e_n)$ de flèches $e_i = (p_i, u_i, v_i, q_i)$ telles que $p = p_1$, $q = q_n$, et $p_i = q_{i-1}$ pour $i = 2, \ldots, n$. Le couple $(u, v) \in A^* \times B^*$, avec $u = u_1 \cdots u_n$ et $v = v_1 \cdots v_n$ est l'*étiquette* de c, u et v étant respectivement l'étiquette d'entrée et de sortie. L'entier n est la *longueur* du calcul. Le calcul c est *réussi* si $p \in I$ et $q \in T$. Le calcul c est un *circuit* si $p = q$ et $n \geq 1$. On note $C_{\mathcal{M}}(p, q)$ l'ensemble des calculs de p à q. Par convention, le calcul vide composé d'aucune flèche est un élément de $C_{\mathcal{M}}(p, p)$ pour tout $p \in Q$. Son étiquette est $(\varepsilon, \varepsilon)$. La *transduction réalisée* par $\mathcal{M}$ est la transduction $f_{\mathcal{M}}$ définie par $v \in f_{\mathcal{M}}(u)$ si, et seulement si (u, v) est l'étiquette d'un calcul réussi de $\mathcal{M}$. Une transduction f de A^* dans B^* est *rationnelle* si elle est réalisée par un transducteur.

5.– On considère le transducteur $\mathcal{M} = (\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, E)$ de A^* dans B^*, avec $A = B = \{a, b\}$, défini par

$$E = \{(1, a, a, 1), (1, b, b, 1)\} \cup \{(p, d, \varepsilon, 2) \mid p = 1, 2,\ d = a, b\}$$

Décrire la transduction réalisée par $\mathcal{M}$.

6.– a) Démontrer que la transduction qui à un mot u associe l'ensemble de ses facteurs est rationnelle. (On rappelle que v est *facteur* de u si et seulement s'il existe des mots x, y tels que $u = xvy$.)

b) Démontrer que la transduction qui à un mot u associe l'ensemble des mots dont u est facteur est rationnelle.

Une application $f : A^* \to B^*$ est un *morphisme* si $f(uv) = f(u)f(v)$ pour tous $u, v \in A^*$. Un morphisme $f : A^* \to B^*$ est *alphabétique* si $|f(u)| \leq |u|$ pour tout $u \in A^*$. Si $f : A^* \to B^*$ est un morphisme, l'application $f^{-1} : B^* \to \wp(A^*)$ est un *morphisme inverse*.

page 122 25/28 1992
Agrégation externe. Options.

7.- a) Démontrer qu'un morphisme et un morphisme inverse sont des transductions rationnelles.

b) Soit K un langage sur un alphabet A. Démontrer que $\cap_K$ est une transduction rationnelle si K est un langage reconnaissable.

8.- Soit $f : A^* \to B^*$ une transduction rationnelle.
a) Démontrer que la transduction $f^\sim : A^* \to B^*$ définie par $f^\sim(u) = (f(u^\sim))^\sim$ est rationnelle.

b) Démontrer que la transduction $g : B^* \to A^*$ définie par

$$u \in g(v) \iff v \in f(u)$$

est rationnelle.

TROISIÈME PARTIE

Soit M un monoïde. L'ensemble $\wp(M)$ des parties de M est naturellement muni d'une structure de monoïde en posant, pour $K, K' \subset M$,

$$KK' = \{kk' \mid k \in K,\ k' \in K'\}$$

Une famille $\mathcal{R} \subset \wp(M)$ est dite *rationnellement fermée* si
(1) $R, R' \in \mathcal{R}$ implique $R \cup R'$, $RR' \in \mathcal{R}$,
(2) $R \in \mathcal{R}$ implique $R^* \in \mathcal{R}$, où $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$ est le sousmonoïde engendré par R.

On note $\mathrm{Rat}(M)$ l'intersection des familles rationnellement fermées de parties de M contenant l'ensemble vide et les parties $\{m\}$ pour $m \in M$. Un élément de $\mathrm{Rat}(M)$ est une *partie rationnelle* de M. Lorsque A est un alphabet, on dit qu'un langage est *rationnel* sur A s'il appartient à $\mathrm{Rat}(A^*)$. On rappelle que la famille des langages rationnels sur A est égale à la famille des langages reconnaissables sur A.

9.- Soit $f : A^* \to B^*$ un morphisme.
a) Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des langages $K \subset A^*$ tels que $f(K)$ est un langage rationnel sur B. Démontrer que la famille $\mathcal{R}$ est rationnellement fermée, et en déduire que si K est un langage rationnel sur A, alors $f(K)$ est un langage rationnel sur B.

b) Soit $C = \bar{A} \cup B$, où $\bar{A} = \{\bar{a} \mid a \in A\}$ est une copie de A disjointe de B. Soit $h : C^* \to B^*$ le morphisme défini par $h(c) = \varepsilon$ pour $c \in \bar{A}$ et $h(b) = b$ pour $b \in B$, et soit $g : C^* \to A^*$ le morphisme défini par $g(b) = \varepsilon$ pour $b \in B$ et $g(\bar{a}) = a$ pour $a \in A$. Démontrer que le langage $R = \{\bar{a} f(a) \mid a \in A\}^*$ est rationnel sur C, et démontrer que

$$f = h \circ \cap_R \circ g^{-1}$$

c) Démontrer que si L est un langage rationnel sur B, alors $f^{-1}(L)$ est un langage rationnel sur A.

Le *domaine* d'une transduction f de A^* dans B^* est l'ensemble $dom\ f = \{u \mid f(u) \neq \emptyset\}$, l'*image* est l'ensemble $Im\ f = \{v \mid \exists u : v \in f(u)\}$.

10.- Démontrer que le domaine et l'image d'une transduction rationnelle sont des langages rationnels.

Un langage K sur un alphabet A est *local* s'il existe deux parties X et Y de A et une partie Z de A^2 telles que

$$K \setminus \{\varepsilon\} = (XA^* \cap A^*Y) \setminus A^*ZA^*.$$

Tournez la page S.V.P.

11.– a) Démontrer que le langage $(abc)^*$ sur $A = \{a, b, c\}$ est local.

b) Démontrer qu'un langage local est rationnel.

c) Démontrer que pour tout langage rationnel K sur un alphabet A, il existe un alphabet B, un langage local L sur B, et un morphisme f de B^* dans A^* tel que $K = f(L)$.

12.– a) Démontrer que pour toute transduction rationnelle f de A^* dans B^*, il existe un alphabet C, un langage local K sur C, et deux morphismes $h : C^* \to A^*$ et $g : C^* \to B^*$ tels que

$$f = g \circ \cap_K \circ h^{-1}$$

b) En déduire que pour tout langage rationnel L sur A, le langage $f(L)$ est rationnel.

13.– Soient $f : A^* \to B^*$ un morphisme, et $K \subset B^*$ un langage rationnel.
a) Démontrer qu'il existe un langage rationnel $L \subset A^*$ tel que

$$f^{-1} \circ \cap_K = \cap_L \circ f^{-1}$$

b) Démontrer qu'il existe un langage rationnel $M \subset A^*$ tel que

$$\cap_K \circ f = f \circ \cap_M$$

14.– Soient $f : A^* \to C^*$ et $g : B^* \to C^*$ deux morphismes alphabétiques. Démontrer qu'il existe un alphabet D et deux morphismes $\alpha : D^* \to A^*$ et $\beta : D^* \to B^*$ tels que

$$g^{-1} \circ f = \beta \circ \alpha^{-1}$$

15.– Soient f une transduction de A^* dans B^* et g une transduction de B^* dans C^*. Démontrer que si f et g sont rationnelles, alors la transduction $h = g \circ f$ de A^* dans C^* définie par $h(u) = g(f(u))$ est rationnelle.

16.– Soit $\pi : A_k^* \to A_k^*$ l'application définie par

$$\pi(w) = \rho_k(1 + \nu_k(w))$$

(on a donc $\nu_k(\pi(w)) = 1 + \nu_k(w)$). Démontrer que π est une transduction rationnelle, et en déduire que si H est une partie k-reconnaissable de $\mathbf{N}$, alors $\{1 + h \mid h \in H\}$ l'est également.

17.– On considère l'alphabet $B_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, et on définit ν_k sur B_k^* comme suit : pour $w = a_0 \cdots a_n$ ($a_i \in B_k$, pour $0 \leq i \leq n$) :

$$\nu_k(w) = \sum_{i=0}^{n} a_i k^{n-i}$$

a) Démontrer que ν_k est une bijection de B_k^* sur $\mathbf{N}$.

b) Soit $f : A_k^* \to B_k^*$ définie par $f(w) = w'$ si et seulement si $\nu_k(w) = \nu_k(w')$. Démontrer que f est une transduction rationnelle.

QUATRIÈME PARTIE

Le produit direct $A^* \times B^*$ est muni d'une structure de monoïde en définissant le produit par $(u, v)(u', v') = (uu', vv')$. Le monoïde libre $(A \times B)^*$ s'injecte canoniquement dans $A^* \times B^*$ en identifiant le couple $(a, b) \in A \times B$ avec lui-même, vu comme élément de $A^* \times B^*$.

18.– Démontrer que pour toute transduction rationnelle f de A^* dans B^*, l'ensemble $G(f)$ est une partie rationnelle de $A^* \times B^*$. (On pourra utiliser une construction analogue à la question 9.a.)

19.– On suppose les alphabets A et B disjoints, et on considère le morphisme α de $(A \cup B)^*$ dans $A^* \times B^*$ défini par $\alpha(a) = (a, \varepsilon)$ pour $a \in A$ et $\alpha(b) = (\varepsilon, b)$ pour $b \in B$. Démontrer que pour toute partie rationnelle R de $A^* \times B^*$, il existe un langage rationnel K sur $A \cup B$ tel que $\alpha(K) = R$.

20.– Déduire des deux questions précédentes qu'une transduction f de A^* dans B^* est rationnelle si, et seulement si $G(f)$ est une partie rationnelle de $A^* \times B^*$.

Une transduction f de A^* dans B^* *préserve la longueur* si $|u| = |v|$ pour tout $(u, v) \in G(f)$. On se propose de montrer que si f préserve la longueur, alors $G(f)$ est un langage rationnel sur $A \times B$.

Pour $(u, v) \in A^* \times B^*$, on note $\|(u, v)\|$ le couple $(|u|, |v|)$ de $\mathbf{N}^2$, et pour $p \in \mathbf{N}^2$, on pose $\Gamma_p = \{x \in A^* \times B^* \mid \|x\| = p\}$. Soit $p \in \mathbf{N}^2$ fixé. On pose $T = A \times B$.

21.– a) Démontrer que pour tout $t \in T^*$ et tout $x \in \Gamma_p$, il existe $t' \in T^*$ et $x' \in \Gamma_p$ uniques tels que $xt = t'x'$.

b) Pour x, x' dans Γ_p, et toute partie K de T^*, on pose

$$K_{x,x'} = \{t' \in T^* \mid \exists t \in K : xt = t'x'\}$$

Démontrer que, pour tout u dans Γ_p, on a

$$uK = \bigcup_{v \in \Gamma_p} K_{u,v} v$$

On note $\mathcal{X}$ l'ensemble des matrices carrées indexées par Γ_p, et à coefficients dans $\wp(T^*)$. Soit $D_p(K) \in \mathcal{X}$ la matrice dont le coefficient d'indice (u, v) est $K_{u,v}$.

22.– Démontrer que

$$D_p(K \cup K') = D_p(K) \cup D_p(K')$$
$$D_p(KK') = D_p(K)\ D_p(K')$$
$$D_p(K^*) = (D_p(K))^*$$

où l'union, le produit et l'étoile de matrices dans $\mathcal{X}$ sont définis, de manière naturelle, par

$$(D \cup D')_{u,v} = D_{u,v} \cup D'_{u,v}, \quad DD'_{u,v} = \bigcup_{w \in \Gamma_p} D_{u,w} D'_{w,v}, \quad D^* = \bigcup_{n \geq 0} D^n$$

23.– Démontrer que si K est un langage rationnel sur T^*, alors chaque coefficient de $D_p(K)$, considéré comme langage sur T^*, est rationnel.

Soit M un monoïde. On définit les familles $\mathrm{Rat}^{(h)}(M)$ de parties de M pour $h \geq 0$ par

(1) $\mathrm{Rat}^{(0)}(M)$ est l'ensemble des parties finies de M;

(2) $\mathrm{Rat}^{(h+1)}(M)$ est l'ensemble des réunions finies de parties de M de la forme

$$u_0 R_1^* u_1 R_2^* \cdots u_{r-1} R_r^* u_r$$

où $r \geq 0$, $u_0, \ldots, u_r \in M$ et $R_1, \ldots, R_r \in \mathrm{Rat}^{(h)}(M)$.

Tournez la page S.V.P.

24.– Démontrer que

$$\mathrm{Rat}(M) = \bigcup_{h \geq 0} \mathrm{Rat}^{(h)}(M)$$

25.– Démontrer que si $R \in \mathrm{Rat}^{(h)}(A^* \times B^*)$ et $R \subset (A \times B)^*$, alors $R \in \mathrm{Rat}((A \times B)^*)$.

26.– Démontrer que si f est une transduction rationnelle de A^* dans B^* qui préserve la longueur, alors $G(f)$ est un langage rationnel sur $A \times B$.

27.– Démontrer qu'une transduction rationnelle f de A^* dans B^* préserve la longueur si et seulement si

$$f = h \circ \cap_K \circ g^{-1}$$

où $h : T^* \to B^*$ et $g : T^* \to A^*$ sont les morphismes définis par

$$h(a,b) = a, \quad g(a,b) = b, \qquad \text{pour } (a,b) \in A \times B$$

et où K est un langage rationnel sur $A \times B$.

28.– Démontrer qu'une transduction rationnelle f de A^* dans B^* préserve la longueur si et seulement s'il existe un transducteur $\mathcal{M} = (Q, I, T, E)$ réalisant f et tel que $E \subset Q \times A \times B \times Q$.

29.– Soit f l'application de A^* dans lui-même définie par $f(w) = va$, où a est la première lettre de w et v est tel que $av = w$. De plus, $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Donner un transducteur réalisant f et qui a la forme donnée dans la question précédente.

CINQUIÈME PARTIE

Soit $k \geq 0$ un entier. Une transduction f de A^* dans B^* est *à différences bornées* par k si, pour tout $(u,v) \in G(f)$, on a $||u| - |v|| \leq k$. Une partie R de $A^* \times B^*$ est à différences bornées si elle est le graphe d'une transduction à différences bornées. On pose $A^{\leq k} = \{w \in A^* \mid |w| \leq k\}$ (et de même pour $B^{\leq k}$) et $\Delta_k = (A^{\leq k} \times \{\varepsilon\}) \cup (\{\varepsilon\} \times B^{\leq k})$.

30.– Démontrer que f est à différences bornées par k si et seulement si $G(f)$ se met sous la forme d'une réunion finie de produits RS, où $R \in \mathrm{Rat}((A \times B)^*)$, et $S \subset \Delta_k$.

31.– Soient $T_1, T_2 \subset (A \times B)^*$ et $S_1, S_2 \subset \Delta_k$. Démontrer que $T_1S_1 \cap T_2S_2 = (T_1 \cap T_2)(S_1 \cap S_2)$.

32.– Démontrer que l'intersection de deux parties rationnelles de $A^* \times B^*$ à différences bornées par k est une partie rationnelle à différences bornées par k.

33.– Démontrer que si R_1 et R_2 sont deux parties rationnelles de $A^* \times B^*$ à différences bornées par k. alors $R_1 \setminus R_2$ est une partie rationnelle à différences bornées par k.